Problemes

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Nova entrega de la secció de problemes de la *SCM/Notícies* amb la constatació que aquesta vegada hi ha hagut força treball per part dels nostres incondicionals col·laboradors. En efecte, de cadascun dels problemes proposats al número anterior n'hem rebut almenys tres solucions i fins a cinc per a l'**A134.** Agraïm, doncs, la feina feta amb els problemes **A133**, **A134**, **A135** i **A136** per Miquel Amengual Covas de Cala Figuera, a Mallorca; per Esteve Casas, de l'Institut Baix Montseny, a Sant Celoni; per Roberto de la Cruz Moreno del CRM, a Bellaterra; per Ramon Gonzàlez Calvet, de l'Institut Pere Calders, a Cerdanyola del Vallès; per Joaquim Nadal i Vidal, de Llagostera, a la Selva, i per Martí Prats i Soler, a la UAM–ICMAT, a Madrid. Ens quedem amb la recança de no poder publicar totes aquestes solucions, tan variades i elegants.

Igualment, agraïm a Miquel Amengual Covas, a Joaquim Nadal i Vidal, a José Luis Díaz–Barrero, de BarcelonaTech, i a Joan Girbau, de l'IEC, Barcelona, els enunciats respectius dels problemes **A137**, **A138**, **A139** i **A140**.

Us recordem que per col·laborar en aquesta secció el correu electrònic per a enviaments és `carles.romero.c@gmail.com` i amb els materials escrits en TEX o LATEX si a més ens feu arribar els fitxers `*.tex` font, ens facilitaran força la feina. Gràcies a tots!

Problemes proposats

A137. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui P un punt del costat BC d'un triangle $\triangle ABC$. La recta perpendicular a AP per P talla AB i CA en els punts D i E, respectivament.

1) Demostrau que si $\widehat{BAC} = 90°$, aleshores: $\dfrac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE} = \dfrac{BP}{PC}$.

2) Si es compleix que $\dfrac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE} = \dfrac{BP}{PC}$, provau o refusau que $\widehat{BAC} = 90°$.

A138. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, Girona.)

En un triangle isòsceles l'ortocentre està sobre la circumferència inscrita. Trobeu-ne l'àrea, tot sabent que és igual que el perímetre

A139. (Proposat per José Luis Díaz–Barrero, BarcelonaTech, Barcelona.)

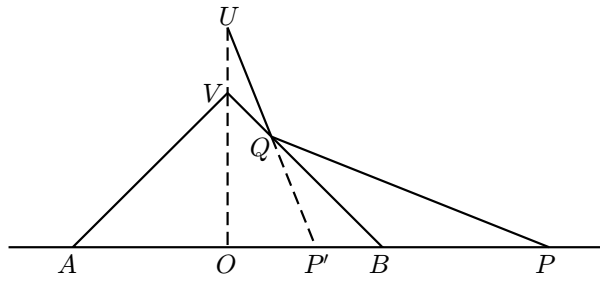
Siguin a_1, a_2, $\ldots$, a_n els n nombres positius definits recursivament mitjançant $a_1 = 2$ i $a_{m+1} = a_m + (a_m - 1)^2$, $m \geq 1$. Demostreu que:

$$2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 < L_n L_{n+1},$$

on L_n és l'n-èssim nombre de Lucas, definit per la recursió $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ i, per a tot $n \geq 3$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.

A140. (Proposat per Joan Girbau, IEC, Barcelona.)

Considereu un con circular tal que l'angle en el vèrtex entre una generatriu qualsevol i l'eix del con sigui de 45° i que la superfície del con sigui un mirall. Prengueu com a unitat de mesura el radi de la circumferència de la base. Col·loqueu aquest con sobre un pla, de manera que la seva base circular coincideixi amb una determinada circumferència c (de radi 1) d'aquest pla i situeu el vostre ull en un punt U molt a prop del vèrtex del con, mirant cap avall, en direcció perpendicular al pla. (Vegeu la figura.)



El vostre ull veurà la regió exterior a c reflectida en el mirall i tindrà la sensació que la regió que veu és interior. Sigui ε la distància entre U i el vèrtex V del con. Sigui P un punt del pla exterior a la circumferència c i P' el punt on vosaltres el veureu. Siguin p i p' les distàncies respectives de P i de P' al centre O de la circumferència c de la base. Proveu que:

$$p' = \frac{1+\varepsilon}{p+\varepsilon}.$$

Observeu que quan el vostre ull s'apropa al vèrtex del con (quan ε tendeix a zero) la transformació que realitza el mirall s'apropa a una inversió respecte a la circumferència c.

Solucions

A133. (Proposat per Pep Burillo, Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona, UPC.)

Tu i 99 persones més heu d'abordar un avió de 100 places, i tu ets l'últim a entrar. Tots els passatgers teniu un seient assignat. La primera persona a entrar és una mica despistada, i seu en un lloc aleatori en lloc del que té assignat. Després, els següents 98 segueixen aquest esquema: si el seu seient està buit, hi seuen, però si està ocupat, seuen en un d'aleatori. Quan tu entres queda, lògicament, un lloc buit. Quina és la probabilitat que el lloc que queda sigui precisament el que tenies assignat de bon començament?

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, la Selva.)

Presentem el problema per a un nombre més petit de passatgers i, després de veure el resultat, generalitzarem. Suposem tres passatgers A, B i C que tenen assignats els seients 1, 2 i 3 i que pugen en ordre alfabètic. Tindrem:

A	1	2	2	3
B	2	1	3	2
C	3	3	1	1

i cada columna és una manera d'ocupar l'avió. Tenim $2^{3-1} = 4$ casos i és clar que:

$$\begin{aligned} &P(B \text{ ocupa el seu seient}) \\ &\quad = P(C \text{ ocupa el seu seient}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si ara afegim un quart passatger D, que és l'últim a entrar i té assignat el seient 4, tindrem de manera òbvia que D només pot ocupar el seient 4 o el seient 1 (no ocuparà mai el seient 2 o el 3, ja que això significaria que B o C no haurien ocupat els seus seients quan tenien la possibilitat de fer-ho, ja que estaven lliures). Així, doncs, completem la taula anterior afegint-hi una quarta fila i quatre columnes més. A les quatre primeres columnes posem 4 a la quarta fila i a les quatre últimes columnes posem 1 a la quarta fila i canviem els 1 per 4 tal com es veu a la taula següent:

A	1	2	2	3	4	2	2	3
B	2	1	3	2	2	4	3	2
C	3	3	1	1	3	3	4	4
D	4	4	4	4	1	1	1	1

És clar que tenim $2^{4-1} = 8$ casos i que:

$$\begin{aligned} &P(B \text{ ocupa el seu seient}) \\ &\quad = P(C \text{ ocupa el seu seient}) \\ &\quad = P(D \text{ ocupa el seu seient}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aquest procés es pot generalitzar de manera òbvia i, per a 100 passatgers tindrem 2^{99} casos i tots els passatgers, menys el primer, tindran una probabilitat 1/2 de seure en el seu seient.

A134. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, Barcelona-Tech, Barcelona.)

Trobeu totes les solucions positives d'aquest sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ xyz+yzt+ztx+txy=4 \end{cases}$$

Solució: (Solució de Roberto de la Cruz Moreno, CRM, Bellaterra.)

A partir de la desigualtat:

$$xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 \qquad (*)$$

(la igualtat es dóna només quan $x = y$) tenim que:

$$\begin{aligned}
4 &= xyz + yzt + ztx + txy \\
&= xy(z+t) + zt(x+y) \leq^{(*)} \\
&\leq \frac{1}{4}\left[(x+y)^2(z+t) + (z+t)^2(x+y)\right] \\
&= \frac{1}{4}(x+y)(z+t)(x+y+z+t) \leq^{(*)} \\
&\leq \frac{1}{16}(x+y+z+t)^3 = 4.
\end{aligned}$$

Per tant les desigualtats són igualtats, cosa que significa que $x = y$, $z = t$, $x + y = z + t$ i, per tant, que $x = y = z = t$, i l'única solució és $x = y = z = t = 1$. (No cal la condició que siguin positives.)

A135. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

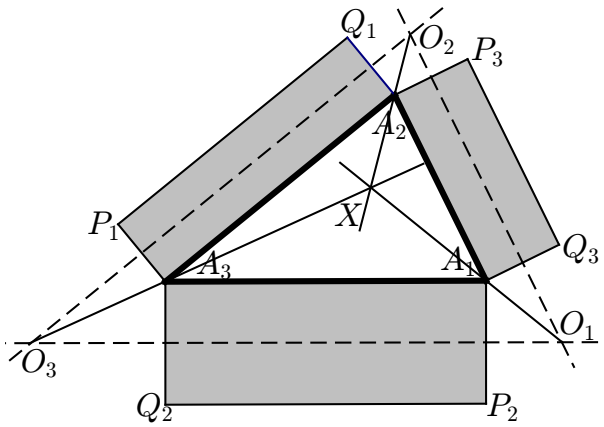
Sobre els costats d'un triangle $\triangle A_1A_2A_3$ construïm, al seu exterior, rectangles $A_2A_3P_1Q_1$, $A_3A_1P_2Q_2$ i $A_1A_2P_3Q_3$.

Siguin O_1, O_2 i O_3 els respectius circumcentres dels triangles $\triangle A_1P_2Q_3$, $\triangle A_2P_3Q_1$ i $\triangle A_3P_1Q_2$.

a) Demostrau que les rectes A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3 són concurrents.

b) Si els triangles $\triangle A_1P_2Q_3$, $\triangle A_2P_3Q_1$ i $\triangle A_3P_1Q_2$ tenen la mateixa àrea, caracteritzau el punt de concurrència de A_1O_1, A_2O_2 i A_3O_3.

Solució: (Solució de Ramon Gonzàlez Calvet, Institut Pere Calders, Cerdanyola del Vallès.)



a) El circumcentre O_1 és la intersecció de les mediatrius dels segments A_1P_2 i A_1Q_3, el circumcentre O_2 és la intersecció de les mediatrius dels segments A_2P_3 i A_2Q_1 i el circumcentre O_3 és la intersecció de les mediatrius dels segments A_3P_1 i A_3Q_2. Observem, però, que els segments A_1Q_3 i A_2P_3 tenen la mateixa mediatriu O_1O_2, perquè els dos segments tenen la mateixa longitud i s'aixequen perpendicularment sobre el costat A_1A_2. Així mateix, els segments A_2Q_1 i A_3P_1 tenen per mediatriu O_2O_3, i els segments A_3Q_2 i A_1P_2 tenen per mediatriu O_3O_1. Aquestes tres mediatrius són paral·leles als respectius costats i, d'aquesta manera, el triangle $\triangle O_1O_2O_3$ té els costats paral·lels al triangle $\triangle A_1A_2A_3$. Es tracta, per tant, de triangles homotètics i la intersecció de les rectes A_1O_1, A_2O_2 i A_3O_3 és un únic punt X, que és el centre d'homotècia dels dos triangles.

b) Ara suposem que els triangles $\triangle A_1P_2Q_3$, $\triangle A_2P_3Q_1$ i $\triangle A_3P_1Q_2$ tenen la mateixa àrea. Aleshores:

$$\begin{aligned}
&\|A_1P_2\|\|A_1Q_3\| \sin \widehat{P_2A_1Q_3} \\
&\quad = \|A_2P_3\|\|A_2Q_1\| \sin \widehat{P_3A_2Q_1} \\
&\quad = \|A_3P_1\|\|A_3Q_2\| \sin \widehat{P_1A_3Q_2}
\end{aligned}$$

i, com que:

$$\begin{aligned}
\|A_1P_2\| &= \|A_3Q_2\| \\
\|A_1Q_3\| &= \|A_2P_3\| \\
\|A_2Q_1\| &= \|A_3P_1\|
\end{aligned}$$

resulta:

$$\frac{\sin \widehat{P_2A_1Q_3}}{\|A_3P_1\|} = \frac{\sin \widehat{P_3A_2Q_1}}{\|A_1P_2\|} = \frac{\sin \widehat{P_1A_3Q_2}}{\|A_2P_3\|}.$$

Ara, atès que els angles $\widehat{P_2A_1Q_3}$ i $\widehat{A_2A_1A_3} = \widehat{A}_1$ són suplementaris i tenen el mateix sinus, així com ho són $\widehat{P_3A_2Q_1}$ i $\widehat{A_3A_2A_1} = \widehat{A}_2$ i també $\widehat{P_1A_3Q_2}$ i $\widehat{A_1A_3A_2} = \widehat{A}_3$ tenim:

$$\frac{\sin \widehat{A_1}}{\|A_3P_1\|} = \frac{\sin \widehat{A_2}}{\|A_1P_2\|} = \frac{\sin \widehat{A_3}}{\|A_2P_3\|}$$

i, pel teorema dels sinus:

$$\frac{\sin \widehat{A_1}}{\|A_2A_3\|} = \frac{\sin \widehat{A_2}}{\|A_3A_1\|} = \frac{\sin \widehat{A_3}}{\|A_1A_2\|}.$$

Dividim la segona sèrie d'igualtats per la primera:

$$\frac{\|A_3P_1\|}{\|A_2A_3\|} = \frac{\|A_1P_2\|}{\|A_3A_1\|} = \frac{\|A_2P_3\|}{\|A_1A_2\|} = 2k$$

i resulta que la distància entre dos costats paral·lels dels triangles homotètics $\triangle O_1O_2O_3$

i $\triangle A_1A_2A_3$ és proporcional a la longitud del costat del triangle (els rectangles $A_2A_3P_1Q_1$, $A_3A_1P_2Q_2$ i $A_1A_2P_3Q_3$ són semblants), és a dir:

$$d\left(A_3A_1, O_3O_1\right) = \frac{\|A_1P_2\|}{2} = k\,\|A_3A_1\|.$$

Sigui X el centre d'homotècia dels dos triangles $\triangle O_1O_2O_3$ i $\triangle A_1A_2A_3$ i sigui r la raó d'homotècia. Tenim:

$$d(X, O_3O_1) = d(X, A_3A_1) + d(A_3A_1, O_3O_1)$$

i com que:

$$d(X, O_3O_1) = r\,d(X, A_3A_1) \qquad \text{i}$$

$$d(A_3A_1, O_3O_1) = k\,\|A_3A_1\|$$

resulta

$$r\,d(X, A_3A_1) = d(X, A_3A_1) + k\,\|A_3A_1\|$$

o sigui:

$$d(X, A_3A_1) = \frac{k}{r-1}\,\|A_3A_1\|$$

Igualment, tenim:

$$d(X, A_1A_2) = \frac{k}{r-1}\,\|A_1A_2\| \qquad \text{i}$$
$$d(X, A_2A_3) = \frac{k}{r-1}\,\|A_2A_3\|$$

Obtenim, per tant, que les distàncies del punt X als tres costats (les seves coordenades trilineals) són proporcionals a les longituds dels costats:

$$\frac{d(X, A_3A_1)}{\|A_3A_1\|} = \frac{d(X, A_1A_2)}{\|A_1A_2\|} = \frac{d(X, A_2A_3)}{\|A_2A_3\|}$$

D'acord amb l'*Encyclopedia of Triangle Centers* de Clark Kimberling: `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html` el punt X que té aquestes coordenades trilineals és el punt simedià (punt de Lemoine o punt de Grebe) denotat amb $X(6)$, punt de concurrència de les simedianes, que són les rectes isogonals (reflectides respecte de les bisectrius) de les medianes. És interessant comprovar que si, en lloc de la condició que els triangles $\triangle A_1P_2Q_3$, $\triangle A_2P_3Q_1$ i $\triangle A_3P_1Q_2$ tinguin la mateixa àrea, imposem que siguin els rectangles $A_2A_3P_1Q_1$, $A_3A_1P_2Q_2$ i $A_1A_2P_3Q_3$ els que tenen la mateixa àrea, aleshores, amb el mateix raonament, s'obté que les coordenades trilineals del centre d'homotècia X són:

$$\frac{1}{\|A_3A_1\|} : \frac{1}{\|A_1A_2\|} : \frac{1}{\|A_2A_3\|}$$

que corresponen al baricentre (la intersecció de les medianes) simbolitzat amb $X(2)$ a l'enciclopèdia de Kimberling.

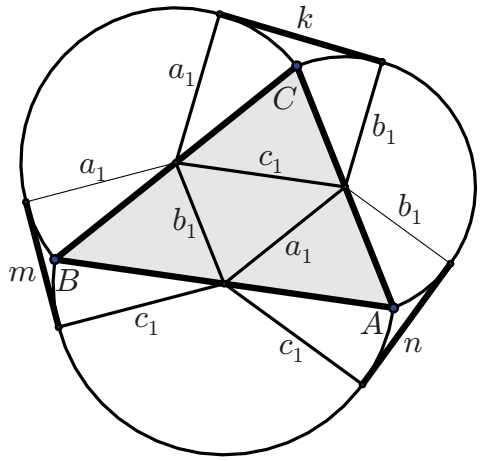
A136. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, la Selva.)

En un triangle $\triangle ABC$ tracem semicircumferències externes que tenen els costats per diàmetre. Tracem les tangents comunes a aquestes semicircumferències. Si k, m i n són les respectives longituds d'aquests segments tangents, proveu que:

$$\frac{km}{n} + \frac{mn}{k} + \frac{nk}{m} = p,$$

on p és el semiperímetre del triangle.

Solució: (Solució d'Esteve Casas, Institut Baix Montseny, Sant Celoni.)



Tenim un triangle $\triangle ABC$ de costats a, b i c i suposem $c \geq a \geq b$. Per demostrar la igualtat proposada considerarem els tres trapezis rectangulars de bases k, m, n i costats $a_1 = a/2$, $b_1 = b/2$, $c_1 = c/2$ que, de fet, són els radis de les circumferències, tal com es veu a la figura.

Les relacions entre els costats d'aquests trapezis, després d'aplicar tres vegades el teorema de Pitàgores, són:

$$k^2 + (a_1 - b_1)^2 = c_1^2$$
$$m^2 + (c_1 - a_1)^2 = b_1^2$$
$$n^2 + (c_1 - b_1)^2 = a_1^2$$

Per tant:

$$k = \sqrt{c_1^2 - (a_1 - b_1)^2}$$
$$m = \sqrt{b_1^2 - (c_1 - a_1)^2}$$
$$n = \sqrt{a_1^2 - (c_1 - b_1)^2}$$

i l'ús de la identitat notable $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ dóna:

$$\frac{km}{n} = c_1 - a_1 + b_1$$
$$\frac{mn}{k} = c_1 - b_1 + a_1$$
$$\frac{nk}{m} = b_1 - c_1 + a_1$$

i la suma de tot plegat és:

$$\frac{km}{n} + \frac{mn}{k} + \frac{nk}{m} = a_1 + b_1 + c_1$$
$$= \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{v}{2} = p.$$

Matemots

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al número 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

En aquesta ocasió seguim l'estela del número anterior, un monogràfic dedicat als **símbols** d'operadors, funcions, etcètera. Es tracta de símbols que són **abreviacions** de paraules, i que eventualment es poden pronunciar, com ara «arg», «det», «Im», «log» o «sup».

Per exemple: «Així et queda el cap si inverteixes malament la tangent». La resposta és «cot», inclinat cap avall, potser avergonyit per no haver arribat correctament a la cotangent, que es pot simbolitzar per «cot».

Hem d'avisar, però, que aquesta vegada els enigmes són un pèl més difícils. Com que el nombre d'abreviacions usades en matemàtiques és relativament curt, no en direm el nombre de lletres.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[1]

1. No camina bé entre matrius.
2. No camina bé entre exponencials.
3. Operador diferencial, i seqüela de cerveses.
4. Operador que apunta en una direcció, potser cap al final d'una ciutat sèrbia o russa.
5. Grup liderat per Astèrix.
6. Desviat cap endins per culpa de la dispersió de les dades.
7. Gos quocient.
8. Facin poesia amb la trigonometria de l'antigor.

[1] Respostes als Matemots: 5. Gal; 3. rot; 6. Var; 1. rang, o rank; 8. versin; 4. grad; 7. coker; 2. cosh.